Nazwa przedmiotu
Wstęp do logiki i teorii mnogości
Introduction to Logic and Set Theory

Kod ECTS
3.1.KRK.12SX.WLTM

Nazwa jednostki prowadzącej przedmiot
Uniwersytet Opolski, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Instytut Matematyki i Informatyki

Studia

Kierunek	stopień	tryb	specjalność	specjalizacja
Matematyka	*Pierwszy*	*Stacjonarne* *Niestacjonarne*[*)]		

Nazwisko osoby prowadzącej/koordynatora (osób prowadzących)
Prof. dr hab. Janusz Czelakowski

Formy zajęć, sposób ich realizacji i przypisana im liczba godzin

A. Formy zajęć
- *wykład (W),*
- *konwersatorium (K),*

B. Sposób realizacji
- *zajęcia w sali wykładowej/ dydaktycznej*

C. Liczba godzin

Wykład – 30 godzin
Konwersatorium – 30 godzin

*) Studia niestacjonarne:
Wykład – 18 godz. (4T+32Z)
Konwersatorium – 18 godzin

Liczba punktów ECTS: 6

Bilans nakładu pracy przeciętnego studenta:
- *5 godz. – wstępny przegląd literatury* [*) 5]
- *15×2 godz. = 30 godz. – udział w wykładach* [*) 18]
- *15×2 godz. = 30 godz. – udział w konwersatoriach* [*) 18]
- *15×1 godz. = 15 godz. – analiza i przyswojenie treści wykładu* [*) 21]
- *7 × 1 godz. = 7 godz. – udział w konsultacjach do wykładu* [*) 2]
- *15×2 godz. = 30 godz. – przygotowanie do konwersatoriów* [*) 36]
- *7× 1 godz.= 7 godz. – udział w konsultacjach do konwersatorium* [*) 4]
- *16 godz. – przygotowanie do sprawdzianów pisemnych na konwersatoriach* [*) 28]
- *12 godz. – przygotowanie do egzaminu* [*) 20]
- *2 godz. – konsultacje przed egzaminem* [*) 2]
- *3 godz. – udział w egzaminie* [*) 3]

Łączny nakład pracy studenta: 157 godzin, co odpowiada 6 pkt. ECTS

w tym
- *nakład pracy związany z zajęciami wymagającymi bezpośredniego udziału nauczycieli akademickich: 30+30+7+7+2+3=**79** godz., co odpowiada **3** pkt. ECTS;*
- *nakład pracy związany z zajęciami o charakterze praktycznym: 30+30+7+16+12+3 = **98** godz., co odpowiada **4** pkt. ECTS*

*) na studiach niestacjonarnych:
- *nakład pracy związany z zajęciami wymagającymi bezpośredniego udziału nauczycieli akademickich: 18+18+2+4+2+3=**47** godz., co odpowiada **2** pkt. ECTS;*
- *nakład pracy związany z zajęciami o charakterze praktycznym: 18+36+4+28+20+3 = **109** godz., co odpowiada **4** pkt ECTS*

Status przedmiotu
- *obowiązkowy*

Język wykładowy
Polski (w razie potrzeby- angielski)

Metody dydaktyczne
- *wykład / wykład problemowy / wykład z prezentacją multimedialną*
- *ćwiczenia audytoryjne: dyskusja / rozwiązywanie zadań*

Forma i sposób zaliczenia oraz podst. kryteria oceny lub wymagania egzaminacyjne
Na ogólnych zasadach określonych w programie kształcenia, a w szczególności

A. Sposób zaliczenia
- *egzamin na ocenę (wykład)*
- *zaliczenie z oceną (konwersatorium)*

B. Formy zaliczenia
- *(W) egzamin na ocenę – pisemny/ustny;*
- *(K) zaliczenie z oceną; ustalenie oceny zaliczeniowej na podstawie ocen cząstkowych otrzymywanych w trakcie trwania semestru za wystąpienia ustne i za prace pisemne.*

C. Podstawowe kryteria
- *(W) uzyskanie pozytywnej oceny;*
- *(K) uzyskanie pozytywnej oceny końcowej*

Określenie przedmiotów wprowadzających wraz z wymogami wstępnymi
Należy określić:
A. *Wymagania formalne: przyjęcie na studia matematyczne*
B. *Wymagania wstępne: wiedza matematyczna na poziomie maturalnym.*

Cele przedmiotu
Przedstawienie najważniejszych, podstawowych pojęć logiki i teorii mnogości. Na poziomie syntaktycznym wprowadza się spójniki prawdziwościowe definicje języka klasycznego rachunku zdań oraz reguły wnioskowania (reguły logiki). Formułuje się pojęcie dowodu (w tym dowodu apagogicznego) oraz aksjomatyczne ujęcie klasycznego rachunku zdań.(KRZ). Uwagi o pojęciu operacji konsekwencji KRZ. Na poziomie semantycznym: wprowadzenie matrycy zero-jedynkowej , pojęcie tauto-

logii oraz pojęcie wynikania logicznego. Uwagi o twierdzeniu o pełności. Fuunkcji zdaniowe, kwantyfikatory i rachunek kwantyfikatorów. Intuicyjne omówienie pojęcia zbioru i przedstawienie działań na zbiorach.. Funkcje i relacje z perspektywy teorii zbiorów, w tym relacje równoważności i częściowe porządki. Liczby naturalne. Dowody indukcyjne i definiowanie przez rekursję arytmetyczną. Konstrukcje mnogościowe zbiorów liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych. Równoliczność i moce zbiorów. Wstęp do aksjomatycznego ujęcia teorii zbiorów

.

Treści programowe

A. *Problematyka wykładu/* ***B***. *Problematyka konwersatorium*

Wartości logiczne. Zadania prawdziwe. Zdania fałszywe. Spójniki logiczne (koniunkcja, alternatywa, negacja, implikacja i równoważność), Forma logiczna zdań. Formuły zdaniowe. Język klasycznego rachunku zdań (KRZ). Pojęcie prawa (tautologii) KRZ. Przykłady tautologii. Metoda zero-jedynkowa i skrócona metoda zero-jedynkowa.

Pojęcie reguły dowodzenia: przesłanki, wniosek. Reguły logiki i przykłady takich reguł: reguła odrywania, reguły odrywania dla równoważności i inne. Kwadrat logiczny: implikacja prosta, implikacja przeciwna, implikacja odwrotna, implikacja przeciwstawna. Reguły sylogizmu warunkowego. Dowody apagogiczne (nie wprost). Ważniejsze tautologie

Pojęcie zbioru. Zbiór pusty. Inkluzja. Suma zbiorów. Iloczyn zbiorów. Ważniejsze prawa algebry zbiorów (przemienność i łączność dodawania i mnożenia zbiorów, prawa idempotentności, prawa absorpcji, prawa rozdzielności). Różnica zbiorów. Związki między różnicą i działaniami dodawania i mnożenia zbiorów (prawa de Morgana). Pojęcie przestrzeni. Utożsamienie pojęcia własności elementów przestrzeni z pojęciem podzbioru przestrzeni. Dopełnienie zbioru (do przestrzeni). Ważniejsze prawa. Aksjomaty algebry zbiorów.

Funkcje zdaniowe jednej zmiennej. Spełnianie funkcji zdaniowej przez elementy przestrzeni. Kwantyfikatory. Kwantyfikatory o zakresie ograniczonym przez funkcję zdaniową.

Aksjomaty liczb naturalnych. Zasada indukcji zupełnej i jej równoważne postaci. Zasada definiowania przez rekursie arytmetyczną. Rekurencyjne definicje dodawania i mnożenia liczb naturalnych. Zasada minimum. Przykłady dowodów indukcyjnych. Kombinacje i symbol Newtona.

Para uporządkowana. Produkt kartezjański zbiorów. Relacje dwuczłonowe (binarne). Relacje m-członowe. Funkcje zdaniowe m-zmiennych i kwantyfikatory. Zastosowania do zapisu definicji i twierdzeń matematycznych. Prawa rachunku kwantyfikatorów.

Sumy i iloczyny uogólnione zbiorów.

Typy relacji binarnych: zwrotne, przeciwzwrotne, symetryczne, przechodnie itp. Funkcje jako relacje serialne i jednoznaczne. Dziedzina i przeciwdziedzina funkcji. Funkcje typu „na” (surjekcje). Funkcje różnowartościowe (injekcje). Bijekcje. Funkcje odwrotne. Złożenie (superpozycja) funkcji.

Produkty uogólnione. Przestrzeń euklidesowa n-wymiarowa. Obrazy i przeciwobrazy wyznaczone przez funkcje.

Relacje równoważności. Klasy abstrakcji. Podział zbioru. Związki między relacjami równoważności a podziałami. Konstrukcja zbioru liczb całkowitych. Konstrukcja zbioru liczb wymiernych. Uwagi o zbiorze liczb rzeczywistych.

Częściowe porządki. Przykłady. Diagramy relacji porządkujących. Elementy maksymalne, elementy minimalne. Element największy. Element najmniejszy. Liniowe porządki, łańcuchy. Ograniczenia górne, ograniczenia dolne. Lemat Kuratowskiego-Zorna. Dobre porządki. Liczby porządkowe.

Równoliczność zbiorów. Liczby kardynalne i moce zbiorów. Zbiory skończone i zbiory przeliczalne. Własności zbiorów przeliczalnych. Liczba kardynalna $\aleph_0$ *(alef zero). Zbiory nieprzeliczalne. Zbiór Cantora. Liczba kardynalna continuum. Nierówności dla liczb kardynalnych. Twierdzenie Cantora-Bernsteina. Hipoteza continuum. Uwagi o aksjomacie wyboru.*

Przybliżenie aksjomatycznego ujęcia teorii mnogości.

Wykaz literatury

A. Literatura wymagana do ostatecznego zaliczenia zajęć (zdania egzaminu):

A.1. wykorzystywana podczas zajęć

1. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej* , PWN, Warszawa 2005..
3. A. Błaszczyk i S. Turek, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa 2007 (Rozdziały 1 – 5).

A.2. studiowana samodzielnie przez studenta

1. W. Marek i J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, Warszawa 2005 (Rozdziały 1 - 8).

B. Literatura uzupełniająca

1. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 2004 (Rozdziały 1 – 8)
2. I. A. Ławrow i Ł. Maksimowa, *Zadania z teorii mnogości, logiki matematycznej i teorii algorytmów*, PWN, Warszawa 2004 (Rozdziały 1 – 2).

Efekty kształcenia

Wiedza

Symb.	Efekt	Metoda weryfikacji	Odniesienie
W01	Student posiada podstawowa wiedzę z zakresu logiki. Zna znaczenie spójników prawdziwościowych i rozumie pojęcie formy logicznej zdania. Zna pojęcie formuły zdaniowej i język klasycznego rachunku zdań (KRZ). Rozumie pojęcie prawa (tautologii) KRZ i potrafi wskazać proste tautologie.	sprawdziany pisemne	K_W01,02,04,06
W02	Zna pojęcie reguły logiki i znaczenie terminów: przesłanka, wniosek. Potrafi wskazać przykłady takich reguł. Zna pojęcie dowodu (wprost) w zakresie KRZ. Zna aksjomatyczne ujęcie KRZ. Zna pojęcie dowodu apagogicznego (nie wprost).		K_W05
W03	Student posiada podstawową wiedzę z zakresu teorii zbiorów. Zna ważniejsze operacje i relacje na zbiorach (suma, iloczyn, różnica, inkluzja) oraz prawa algebry zbiorów. Zna podstawowe aksjomaty teorii zbiorów. Zna pojęcia przestrzeni i dopełnienia zbioru (do przestrzeni).		K_W01,06
W04	Zna pojęcie funkcji zdaniowej jednej zmiennej oraz pojęcie spełniania funkcji zdaniowej przez elementy przestrzeni. Zna kwantyfikatory i ich znaczenie.		K_W02,03,04,05, 07
W05	Student uzyskuje podstawową wiedzę dotycząca arytmetyki liczb naturalnych i kombinatoryki. Zna aksjomaty liczb naturalnych oraz zasadę indukcji zupełnej. Zna podstawy definiowania przez rekursję arytmetyczną. Zna podstawowe pojęcia kombinatoryki i ma opanowane przykłady dowodów indukcyjnych w zakresie kombinatoryki.		K_W02,04,05,10
W06	Zna dalsze pojęcia mnogościowe: produkt kartezjański zbiorów i relacje. Zna funkcje zdaniowe wielu zmiennych oraz prawa rachunku kwantyfikatorów.		K_W02,03,04,07
W07	Zna sumy i iloczyny uogólnione zbiorów.		K_W03,06
W08	Zna podstawy teorii relacji i funkcji jako fragmentu teorii mnogości.		K_W03,04,06
W09	Zna pojęcie produktu uogólnionego zbiorów i jego rolę w wybranych dziedzinach matematyki (np. w geometrii)		K_W03,04,06,07
W10	Zna relacje równoważności i pojęcia pokrewne. Zna zasadę definiowania przez abstrakcję i przykłady takich definicji np., w konstrukcji liczb zbiorów liczb całkowitych i wymiernych.		K_W03,04,06,07
W11	Posiada wstępną wiedzę o strukturach porządkowych w matematyce i ich roli w teorii mnogości.		K_W06,08,10
W12	Zna w pełni symbolikę logiczna i teorio-mnogościową. Jest oswojony z pojęciami niefinitystycznymi wywodzącymi się z teorii mnogości. Zna znaczenie teorii mnogości w definiowaniu najważniejszych pojęć matematycznych.	obserwacja/ konwersacja	K_W06,07,09,11

Umiejętności:

Symb.	Efekt	Metoda weryfikacji	Odniesienie
U01	Posługuje się metodą zero-jedynkową i skróconą metodą zero-jedynkową i potrafi rozstrzygać dla prostej formuły, czy jest ona tautologią, czy też nie jest. Potrafi wskazać proste tautologie.	sprawdziany pisemne	K_U01,06
U02	Potrafi posługiwać się regułami wnioskowania. Potrafi podać dowody prostych tautologii w systemie aksjomatycznym klasycznego rachunku zdań (KRZ).		K_U01,02
U03	Potrafi operować algebrą zbiorów w różnych kontekstach matematycznych		K_U01
U04	Potrafi stosować kwantyfikatory do zapisu definicji i twierdzeń matematycznych.		K_U01
U05	Potrafi prowadzić dowody matematyczne z użyciem zasady indukcji zupełnej, a także definiować przez rekursję arytmetyczną.		K_U01,02,
U06	Potrafi w prostych przypadkach rozstrzygać, czy zadana funkcja zdaniowa jest prawem rachunku kwantyfikatorów, czy też nie jest. Potrafi prowadzić proste dowody o treści matematycznej z użyciem notacji logicznej i praw kwantyfikatorów.		K_U01,02,03
U07	Potrafi zastosować sumy i iloczyny uogólnione zbiorów w praktyce matematycznej.		K_U01,03
U08	Potrafi zastosować aparat teorii relacji do opisu i rozwiązania zagadnień o treści matematycznej.		K_U03,04,05
U09	Potrafi stosować symbolikę teoriomnogościową i logiczną do zapisu problemów matematycznych, a także do formalizacji zagadnień ujętych w języku naturalnym.		K_U01,03,04,06, 08
U10	Potrafi definiować relacje równoważności i stosować relacje równoważności do definiowania przez abstrakcję.		K_U01
U11	Dostrzega strukturę logiczną aksjomatycznych teorii matematycznych i		K_U01,02,09

	rozumie pojęcia niesprzeczności teorii oraz niezależności układu aksjomatów.		
U12	Potrafi w podstawowym zakresie poprawnie definiować, posługując się poznanymi metodami, rozmaite pojęcia matematyczne		K_U05,08,09,
U13	Potrafi posługiwać się językiem i aparatem pojęciowym teorii mnogości przy interpretacji zagadnień z różnych obszarów matematyki.		K_U09,10,12
U14	Posiada umiejętność stosowania reguł logiki w dowodach matematycznych i sprawdzania poprawności dowodów.		K_U05,06,09,11, 12
U15	Wykształcenie w podstawowym zakresie umiejętności samodzielnego stawiania problemów matematycznych i ich zwięzłego zapisu z użyciem symboliki logicznej i mnogościowej.		K_U12,13,14

Kompetencje społeczne (postawy)

Symb.	Efekt	Metoda weryfikacji	Odniesienie
K01	Zna ograniczenia własnej wiedzy i rozumie potrzebę dalszego kształcenia		K_K01
K02	Wykształcenie podstaw kultury logicznej i doskonalenie umiejętności językowych, takich jak precyzja wyrażania się, unikania terminów nieostrych i umiejętność argumentacji. w dyskusjach. Znajomość błędów logiczno-językowych oraz stosowanie reguł ekonomii wypowiadania myśli w procesach komunikowania W szczególności, w odniesieniu do przekazywanej wiedzy z zakresu logiki i teorii mnogości, przyjmuje się, że student potrafi precyzyjnie formułować pytania, zarówno werbalnie w trakcie zajęć, jak i na potrzeby agregatów wyszukujących i naukowych baz danych, służące pogłębieniu własnego zrozumienia danego tematu lub odnalezieniu brakujących elementów rozumowania.	konwersacja	K_K02
K03	Wykształcenie postaw etycznych, a zwłaszcza uczciwości intelektualnej.	konwersacja	K_K04
K04	Potrafi formułować opinie na temat problemów z logiki i teorii mnogości na poziomie elementarnym i je uzasadniać.	konwersacja	K_K07

Kontakt:

Wykaz numerów telefonicznych i adresów mailowych pracowników znajduje się na stronie Instytutu Matematyki i Informatyki: www.math.uni.opole.pl